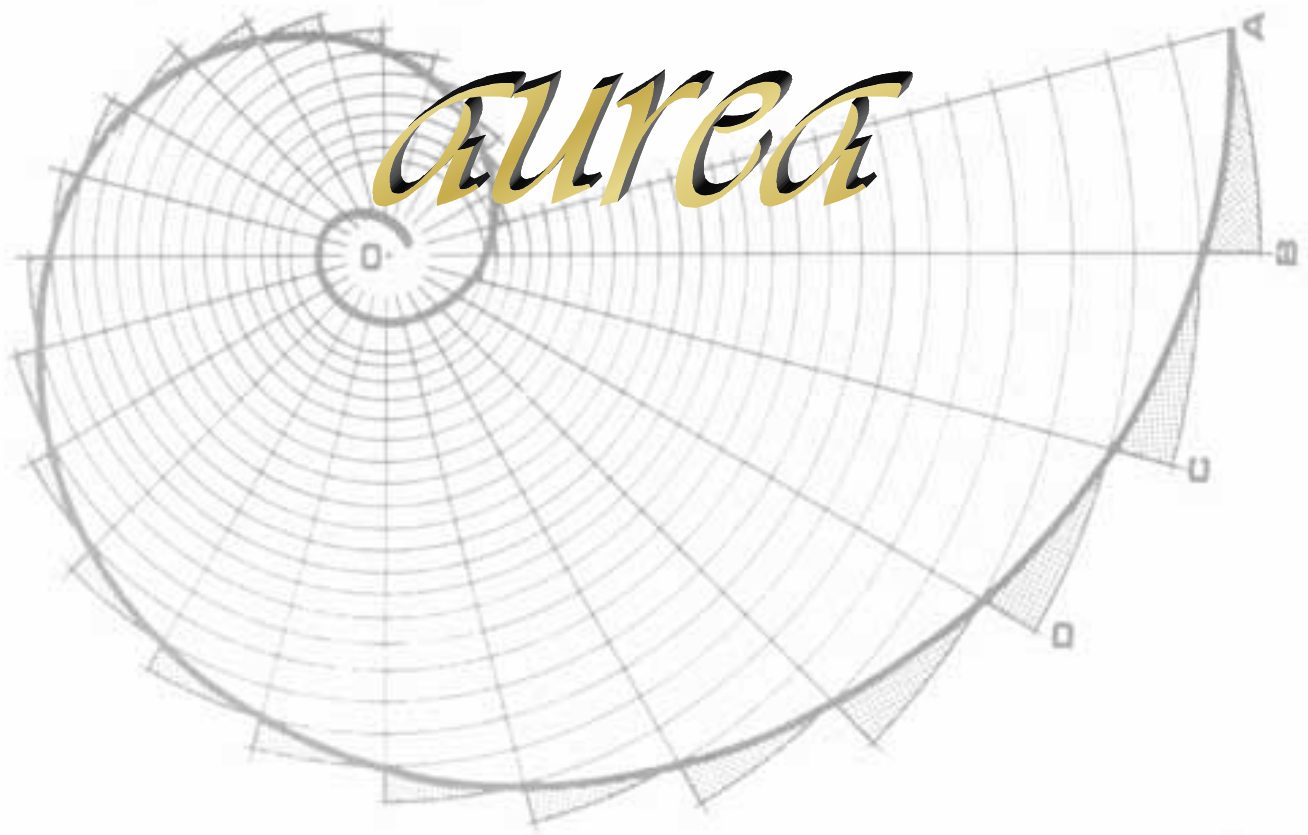


La sezione

aurea



Milani Damiano

classe 5A

anno scolastico 2006/2007

Liceo Scientifico G. Galilei

Indice

La sezione aurea	Pag. 3
Definizione di sezione aurea	4
Costruzione della sezione aurea di un segmento	5
Pentagrammi e triangoli aurei	6
Rettangoli aurei	7
Spirali auree	8
Irrazionalità di phi	10
Il valore di ϕ	11
Proprietà del rapporto aureo	12
Fibonacci e la sezione aurea	14
Solidi platonici	18
Algoritmi per il calcolo di phi	19
I Pitagorici	22
La dottrina dell'anima	22
La dottrina del numero: la matematica	23
Acustica e sezione aurea	25
Le onde stazionarie	25
La scala pitagorica e la scala temperata	27
Le galassie a spirale	29
La sezione aurea nell'arte	31
Salvador Dalí, <i>Il sacramento dell'Ultima Cena</i>	32
The Divine Proportion and <i>The Da Vinci Code</i>	34
Bibliografia	38

La sezione aurea

Che cosa hanno in comune la mirabile disposizione dei petali di una rosa, le opere di artisti come Dalì, Mondrian, i progetti di Le Corbousier e l'armoniosa spirale della nostra galassia?

Per quanto possa sembrare strano, queste realtà così disparate condividono un numero, o una proporzione geometrica, noti fin dall'antichità e designati nell'Ottocento con una serie di definizioni che alludono all'oro, simbolo di ciò che è nobile, inalterabile e prezioso: un *numero aureo*, *rapporto aureo* o *sezione aurea*. Prima ancora, un importante trattato scritto e pubblicato in Italia all'inizio del Cinquecento, il *De divina proportione*, era giunto a definire queste corrispondenze *divine*.

Normalmente usiamo il sostantivo "proporzione" per identificare un rapporto tra cose – o parti di esse – considerate secondo la grandezza o la quantità; oppure un rapporto tra cose o parti di esse che appaia caratterizzato da una particolare armonia. In matematica, con "proporzione" si indica di solito un'uguaglianza del tipo: 9 sta a 3 come 6 sta a 2. Il rapporto aureo è un interessante amalgama dei due significati, quello quantitativo e quello estetico, perché pur essendo definito matematicamente gli viene attribuita la capacità, se applicato a oggetti che colpiscono i sensi, di renderli piacevolmente armoniosi.

Alcune delle migliori menti matematiche di ogni tempo, da Pitagora a Euclide nella Grecia antica, passando, nel Medioevo, per il matematico Leonardo da Pisa e nel Rinascimento per l'astronomo Johannes Kepler, fino ai protagonisti della scienza contemporanea come il fisico Roger Penrose, hanno prodigato tempo e riflessione a questo semplice rapporto e alle sue proprietà. Biologi, artisti, musicisti, storici, architetti e psicologi hanno indagato e discusso la sua inattesa presenza nei campi più diversi. In effetti, dire che il rapporto aureo ha ispirato pensatori di tutte le discipline più di qualunque altro numero nella storia della matematica non è affatto un'esagerazione.



Definizione di sezione aurea

“La geometria possiede due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro la divisione di una linea secondo il rapporto estremo e medio. Possiamo paragonare il primo a una certa quantità d'oro, e definire il secondo una pietra preziosa”

Johannes Kepler

I primi a studiare la sezione aurea furono i matematici greci, a causa della frequenza con cui questa proporzione appare in semplici figure geometriche come i pentagoni regolari. In particolare la scoperta di questa proporzione è da attribuire a un allievo di Pitagora, Ippaso di Metaponto vissuto intorno al V secolo a. C..

Ma la prima rigorosa definizione scritta del rapporto che sarebbe stato chiamato *aureo* fu formulata, circa tre secoli prima di Cristo, dal fondatore della geometria in quanto sistema deduttivo: Euclide, il matematico greco vissuto ad Alessandria.

Dopo la morte di Alessandro Magno, nel 306 a.C. Tolomeo I assunse il controllo dell'Egitto e delle province africane; una delle sue iniziative culturali fu la fondazione ad Alessandria di un centro di insegnamento di alto livello, di cui faceva parte anche la celebre biblioteca. Del primo corpo docenti della scuola fece parte Euclide, autore del più noto trattato di storia della matematica, gli *Elementi* (*Stoichia*). Questo capolavoro – un trattato in tredici volumi sulla geometria e la teoria dei numeri – è ritenuto l'opera di matematica più grandiosa e influente che sia mai stata scritta.

Il rapporto aureo è più volte nominato e discusso negli *Elementi*. Una sua prima definizione è fornita in relazione alle aree delle figure piane nel Libro II, in modo indiretto. Una seconda, e più chiara, definizione, è data in rapporto alla proporzionalità nel Libro VI. Il rapporto aureo è poi utilizzato da Euclide in una serie di costruzioni, in particolare in quella del pentagono, dell'icosaedro e del dodecaedro.

Euclide si è soffermato su questo particolare rapporto di lunghezze, ottenibile in modo relativamente semplice dividendo una linea secondo quella che chiamò la sua *proporzione media e estrema*. Ecco cosa scrisse:

Si può dire che una linea retta sia stata divisa secondo la proporzione estrema e media quando l'intera linea sta alla parte maggiore così come la maggiore sta alla minore.

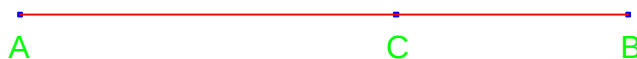


Fig. 1

In altre parole, osservando la Figura 1 è chiaro che se il rapporto tra i segmenti *AC* e *CB* è uguale a quello tra *AB* e *AC* si può dire che il segmento *AB* è stato diviso secondo la proporzione estrema e media, ovvero secondo il suo rapporto aureo.

Nella letteratura matematica specialistica, il simbolo consueto per indicare il rapporto aureo è la lettera greca τ , dal greco *tomè*, taglio o sezione. Ma all'inizio del XX secolo il matematico americano Mark Barr ha introdotto l'uso, al posto di *tau*, della lettera greca *phi* (ϕ), dall'iniziale del nome del grande scultore Fidia (V sec a.C.). Barr volle rendere omaggio allo scultore perché secondo numerosi storici dell'arte Fidia aveva spesso applicato, consciamente e con grande precisione, il rapporto aureo alle sue opere.

Costruzione della sezione aurea di un segmento

Per costruire la sezione aurea di un dato segmento si procede nel seguente modo.

Dato il segmento AB si conduca la perpendicolare ad AB nell'estremo B e si prenda su di esso il segmento BO , metà di AB , quindi con centro in O si descriva la circonferenza di raggio OB ; il segmento AB , risultando perpendicolare al raggio OB nel punto B , è tangente alla circonferenza descritta. Si unisca A con O e si indichino con D e con E le intersezioni della retta AO con la circonferenza; si porti infine su AB il segmento $AC \cong AE$. AC è la sezione aurea di AB , ovvero sussiste la proporzione

$$AB : AC = AC : CB$$

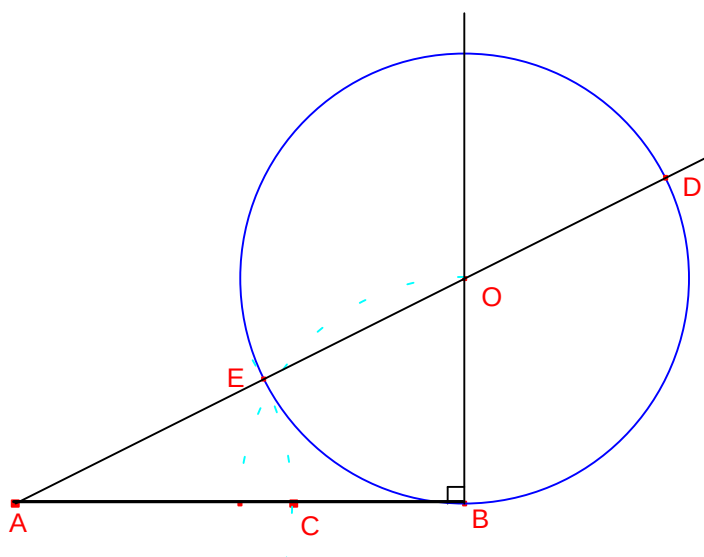


Fig. 2

Dimostrazione:

Per il teorema delle tangenti e delle secanti si ha: $AD:AB \cong AB:AE$

Per costruzione si ha:

$$AD \cong AE + ED \quad ED \cong AB \quad AB - AC = CB \quad AE \cong AC$$

perciò $AD \cong AC + AB$.

Sostituendo si ha che:

$$(AC + AB):AB = AB:AC$$

Quindi scomponendo:

$$(AC + AB - AB):AB = (AB - AC):AC$$

$$AC:AB = CB:AC$$

Infine, invertendo i rapporti si avrà

$$AB:AC = AC:CB.$$

c.v.d.

Pentagrammi e triangoli aurei

La scoperta della sezione aurea è da collegare al particolare interesse che i pitagorici avevano per figure geometriche come il pentagono regolare. Il simbolo di questa confraternita era il pentagramma (fig. 3), una figura geometrica che si costruisce unendo i tutti i vertici di un pentagono regolare tramite le diagonali.

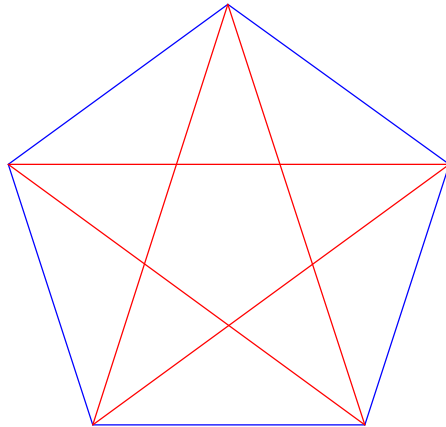


Fig. 3

Le diagonali così costruite formano vicino al centro un pentagono regolare più piccolo. Ovviamente, il procedimento può essere ripetuto, costruendo un secondo pentagramma e quindi un terzo pentagono, in una progressione che può continuare fino all'infinito. Ma la caratteristica più importante di questa figura è un'altra: osservando i segmenti via via più corti si può dimostrare che ogni segmento è minore del precedente di un fattore esattamente uguale al rapporto aureo.

Infatti considerando che in ogni figura piana regolare la somma di tutti gli angoli interni è uguale a $180^\circ \times (n - 2)$ dove n è il numero dei lati, si ricava che ciascuno degli angoli interni del pentagono misura 108° . Si traccino quindi 2 diagonali con un vertice in comune, come in figura 4a; si ricavano così 3 triangoli isosceli.

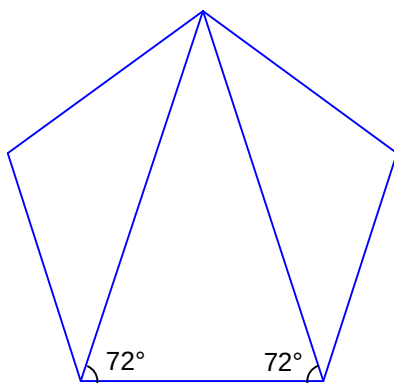


Fig. 4a

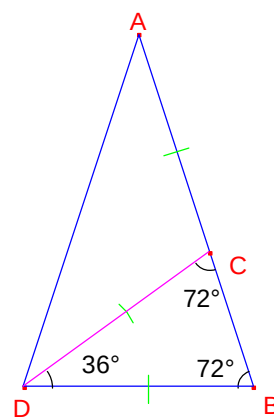


Fig. 4b

Siccome in un triangolo isoscele i due angoli adiacenti alla base hanno la stessa ampiezza, gli angoli alla base dei due triangoli laterali sono uguali a metà di $(180^\circ - 108^\circ)$, cioè a 36° . Pertanto otteniamo per gli angoli del triangolo centrale i valori di 36° , 72° e 72° . Bisecando uno dei due angoli di 72° , come mostrato in figura 4b, otteniamo un triangolo più piccolo con gli stessi angoli di 36° , 72° e 72° . Il triangolo appena costruito CDB è perciò simile al triangolo di partenza ADB e si avrà quindi:

$$AD:DB = DB:BC.$$

Sempre per il fatto che i triangoli sono isosceli, abbiamo: $DB = DC = AC$.

Dalle uguaglianze precedenti, ricaviamo:

$$AC:BC = AB:AC,$$

il che significa, per la definizione di sezione aurea, che il punto C divide il segmento AB secondo il rapporto aureo.

Poiché $AD = AB$ e $DB = AC$, abbiamo anche che $AD/DB = \varphi$.

In altre parole in un pentagono regolare il rapporto tra la diagonale e il lato è un rapporto aureo. Questo dimostra che la capacità di costruire una linea divisa secondo il rapporto aureo costituisce nello stesso tempo un semplice sistema per la costruzione di un pentagono regolare. Il triangolo centrale della figura 4a è noto come *triangolo aureo*, mentre i due triangoli laterali, con un rapporto del lato con la base pari a $1/\varphi$, sono talvolta chiamati *gnomoni aurei*. In figura si può inoltre notare una singolare proprietà del triangolo aureo e degli gnomoni aurei: entrambi possono essere scomposti in triangoli più piccoli, che sono a loro volta triangoli aurei e gnomoni aurei.

Dalla definizione di triangolo aureo è facile desumere che il lato di un decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta (figura 5). Infatti possiamo dividere il decagono in 10 triangoli isosceli che hanno per lato il raggio della circonferenza e per base ciascuno dei lati del poligono. Questi triangoli hanno l'angolo al vertice ampio $360^\circ/10 = 36^\circ$ e quindi ciascuno dei due angoli alla base di misura 72° . I triangoli costruiti sono perciò triangoli aurei.

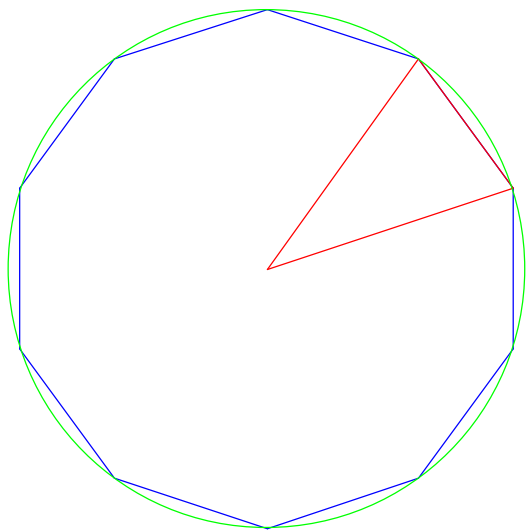


Fig. 5

Rettangoli aurei



Un'altra particolare figura geometrica è il cosiddetto rettangolo aureo, che ha avuto grande influenza sull'arte. Si chiama *rettangolo aureo* il rettangolo avente un lato che è sezione aurea dell'altro (figura 6).

Fig. 6

Se si immagina di sottrarre da questo rettangolo un quadrato di lato uguale al lato minore, il risultato sarà un piccolo rettangolo che è a sua volta un rettangolo aureo (per la proprietà dello scomporre delle proporzioni). Le dimensioni del rettangolo “figlio” sono minori di quelle del rettangolo “genitore” di un fattore pari a ϕ . Togliendo un quadrato al rettangolo “figlio” con lo stesso procedimento, otteniamo un terzo rettangolo aureo di nuovo rimpicciolito di un fattore ϕ . Proseguendo si genera una serie di rettangoli aurei sempre più piccoli, di dimensioni ridotte, ogni volta, di un fattore uguale a ϕ (figura 7). Infine, tracciando due diagonali che si intersecano in ciascuna coppia di rettangoli, “genitore” e “figlio”, si trova che tutte le diagonali passano per un punto. Si può dire che una serie di rettangoli aurei sempre più piccoli converga intorno a quel punto, senza mai raggiungerlo. Ispirandosi alle qualità “divine” attribuite al rapporto aureo, il matematico C. A. Pickover ha suggerito di chiamare tale punto *l’occhio di Dio*.

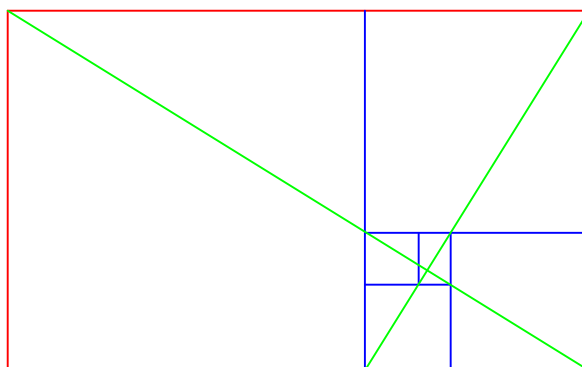


Fig 7

Spirali auree

Alla sezione aurea è collegata una particolare curva, la *spirale logaritmica*. Questa curva ha una caratteristica fondamentale: crescendo non cambia forma. Descritta da Jacques Bernoulli (1654-1705) nel trattato *Spira mirabilis*, la spirale logaritmica diviene sempre più ampia e la distanza tra un giro e i successivi aumenta man mano che ci si allontana dall’origine, detta *polo*. In particolare avanzando con angoli della medesima ampiezza, la distanza dal polo aumenta con una proporzione costante. La spirale logaritmica è anche chiamata *spirale equiangola*, nome coniato dal matematico e filosofo francese Cartesio (1596-1650); questo aggettivo rispecchia un’altra proprietà unica della spirale logaritmica: tracciando una linea dritta dal polo a un punto qualunque della spirale, questa intercetta la curva formando sempre lo stesso angolo (figura 8).

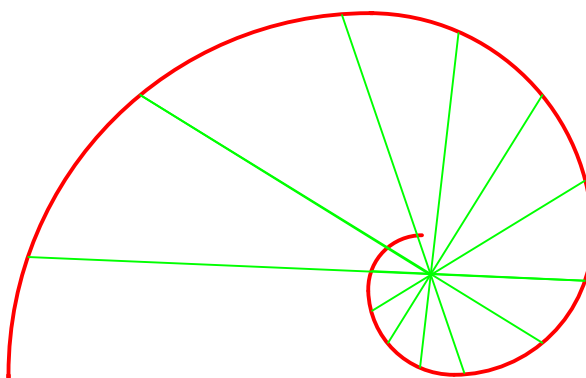


Fig. 8

Il legame tra rapporto aureo e spirale logaritmica è assai stretto. Se si congiungono i punti che dividono i rettangoli aurei della figura 7, si ottiene una spirale logaritmica che si sviluppa intorno al polo, il punto di intersezione delle diagonali (figura 9a). La spirale logaritmica si può ricavare anche da un triangolo aureo. Si è visto che partendo da questo triangolo e bisecando un angolo alla base si ottiene un triangolo aureo più piccolo. Continuando indefinitamente a bisecare gli angoli alla base si ottiene un “vortice” di triangoli sempre più piccoli, e collegando con una curva i vertici dei triangoli si ottiene una spirale logaritmica (figura 9b).

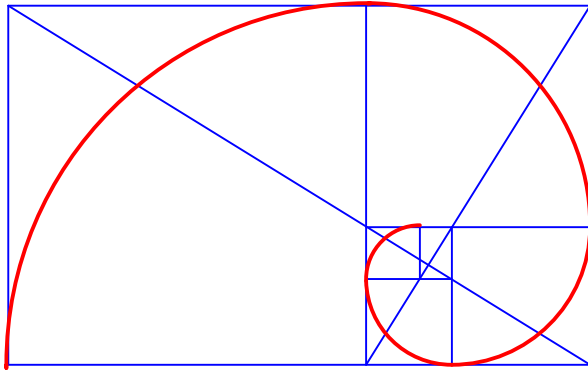


Fig. 9a

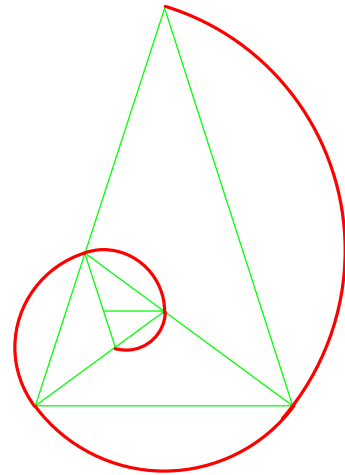


Fig. 9b

La natura ama le spirali logaritmiche: dai girasoli alle conchiglie, dai vortici degli uragani alle immense spirali galattiche, sembra che la natura abbia scelto quest’armoniosa figura come proprio ornamento preferito. Proprio per il fatto che crescendo la sua forma non cambia, i fenomeni di accrescimento naturale sfruttano questa particolare disposizione. Ad esempio il *nautilus* (figura a lato) nella sua conchiglia aumenta in grandezza e si costruisce camere sempre più spaziose, abbandonando e sigillando quelle inutilizzate perché troppo piccole. Mentre la conchiglia si allunga, il raggio aumenta in proporzione, cosicché la forma del guscio rimane inalterata. In tal modo il mollusco, pur ampliandola, trascorre tutta la vita nella stessa dimora e non ha bisogno di correggere l’equilibrio col passare del tempo. Lo stesso principio vale per le corna del montone o per le zanne dell’elefante. La traiettoria di questa curva è la stessa che usa il falcone durante la caccia per la sua particolarità di essere equiangola.



Irrazionalità di phi

Si racconta che quando il matematico greco Ippaso di Metaponto scoprì che il rapporto aureo non appartiene né all'insieme degli interi né a quelli dei rapporti tra gli interi, tale novità fu un vero trauma per i seguaci di Pitagora. L'idea dell'esistenza di simili numeri fu accolta con grande angoscia, considerandola il segno di un'imperfezione cosmica da tenere il più possibile segreta.

Il fatto che la sezione aurea non si possa esprimere per mezzo di una frazione, cioè come numero razionale, significa che è impossibile trovare due numeri interi il cui rapporto corrisponda esattamente al rapporto delle lunghezze dei due segmenti risultanti dalla divisione del segmento di partenza. Dal punto di vista geometrico, trovare due numeri del genere significherebbe trovare un segmento che sia contenuto un numero intero di volte in entrambi i segmenti. Ma per quanto cercassimo, un segmento con questa proprietà non potremmo trovarlo.

Si può dimostrare l'irrazionalità di ϕ dimostrando l'incommensurabilità del lato e della diagonale di un pentagono regolare (questi segmenti sono infatti in sezione aurea).

Dimostrazione:

Vogliamo dimostrare che la diagonale e il lato del pentagono sono incommensurabili, che non hanno cioè nessuna misura in comune. Si perviene alla dimostrazione sfruttando il fatto che è possibile costruire una serie di pentagoni e pentagrammi inseriti gli uni dentro agli altri proseguendo indefinitamente; inoltre si parte da un ragionamento *per assurdo*.

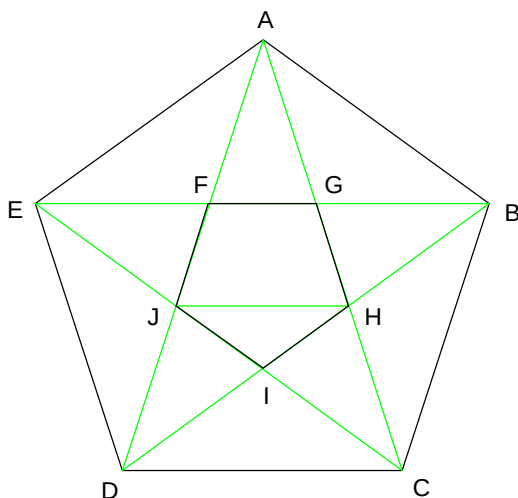


Fig. 10

Si consideri la figura 10. Chiamiamo l_1 il lato del pentagono $ABCDE$, e d_1 la sua diagonale. Tramite le proprietà dei triangoli isosceli, è facile provare che $AB=AH$ e $HC=HJ$. Chiamiamo poi l_2 il lato del piccolo pentagono $FGHIJ$, e d_2 la sua diagonale.

Evidentemente:

$$AC=AH+HC=AB+HJ$$

Perciò

$$d_1 = l_1 + d_2 \quad \text{ovvero} \quad d_1 - l_1 = d_2$$

Dire che d_1 e l_1 hanno una misura in comune equivale a dire che d_1 e l_1 sono multipli interi di quella misura. Perciò, tale misura sarà comune anche a $d_1 - l_1$ cioè a d_2 . In modo simile, le uguaglianze

$$AG=HC=HJ$$

$$AH=AB$$

e

$$AH=AG+GH$$

$$AB=HJ+GH$$

danno

$$l_1 = l_2 + d_2$$

ovvero

$$l_1 - d_2 = l_2$$

Poiché in base alle ipotesi, la misura comune di l_1 e d_1 è anche comune a d_2 , l'ultima uguaglianza dimostra che è anche comune a l_2 . Abbiamo quindi provato che l'unità di misura comune a l_1 e a d_1 è anche comune a l_2 e d_2 . Questo ragionamento può essere ripetuto indefinitamente, per pentagoni sempre più piccoli. Di conseguenza, la stessa unità di misura che il lato e la diagonale del pentagono più grande hanno in comune, l'avrebbero in comune il lato e la diagonale di tutti gli altri pentagoni, per quanto piccoli. Poiché ciò è impossibile sebbene la deduzione sia impeccabile, dobbiamo concludere che l'ipotesi di partenza – che il lato e la diagonale del pentagono abbiano un'unità di misura comune – è falsa; ovvero è dimostrata, per assurdo, l'incommensurabilità tra l_1 e d_1 .

Il valore di φ

Per calcolare il valore della sezione aurea (che come si è appena dimostrato è un numero irrazionale) si consideri la definizione geometrica di tale concetto. Sia a la misura di un segmento: la misura x della sua sezione aurea si può ricavare dalla proporzione

$$a : x = x : (a - x)$$

Da cui

$$x^2 = a(a - x) \rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \rightarrow x = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

Esclusa la soluzione negativa, si ha che la parte aurea di un segmento di misura a è

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

Quindi il rapporto aureo (il rapporto tra un segmento e la sua sezione aurea) vale

$$j = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180339887...$$

È facile constatare che φ è irrazionale essendo semplicemente la metà della somma di 1 e della radice quadrata di 5 (un numero irrazionale).

Di seguito è riportato il valore di ϕ fino alla 2090ª cifra decimale:

```

1, 618033 9887498 9484820 4586834 3656381 1772030 9179805 7628621 3544862 2705260
4628189 0244970 7207204 1893911 3748475 4088075 3868917 5212663 3862223 5369317
9318006 0766726 3544333 8908659 5939582 9056383 2266131 9928290 2678806 7520876
6892501 7116962 0703222 1043216 2695486 2629631 3614438 1497587 0122034 0805887
9544547 4924618 5695364 8644492 4104432 0771344 9470495 6584678 8509874 3394422
1254487 7066478 0915884 6074998 8712400 7652170 5751797 8834166 2562494 0758906
9704000 2812104 2762177 1117778 0531531 7141011 7046665 9914669 7987317 6135600
6708748 0710131 7952368 9427521 9484353 0567830 0228785 6997829 7783478 4587822
8911097 6250030 2696156 1700250 4643382 4377648 6102838 3126833 0372429 2675263
1165339 2473167 1112115 8818638 5133162 0384005 2221657 9128667 5294654 9068113
1715993 4323597 3494985 0904094 7621322 2981017 2610705 9611645 6299098 1629055
5208524 7903524 0602017 2799747 1753427 7759277 8625619 4320827 5051312 1815628
5512224 8093947 1234145 1702237 3580577 2786160 0868838 2952304 5926478 7801788
9921990 2707769 0389532 1968198 6151437 8031499 7411069 2608867 4296226 7575605
2317277 7520353 6139362 1076738 9376455 6060605 9216589 4667595 5190040 0555908
9502295 3094231 2482355 2122124 1544400 6470340 5657347 9766397 2394949 9465845
7887303 9623090 3750339 9385621 0242369 0251386 8041457 7995698 1224457 4717803
4173126 4532204 1639723 2134044 4494873 0231541 7676893 7521030 6873788 0344170
0939544 0962795 5898678 7232095 1242689 3557309 7045095 9568440 1755519 8819218
0206405 2905518 9349475 9260073 4852282 1010881 9464454 4222318 8913192 9468962
2002301 4437702 6992300 7803085 2611807 5451928 8770502 1096842 4936271 3592518
7607778 8466583 6150238 9134933 3312231 0533923 2136243 1926372 8910670 5033992
8226526 3556209 0297986 4247275 9772565 5086154 8754357 4826471 8141451 2700060
2389016 2077732 2449943 5308899 9095016 8032811 2194320 4819643 8767586 3314798
5719113 9781539 7807476 1507722 1175082 6945863 9320456 5209896 9855567 8141069
6837288 4058746 1033781 0544439 0943683 5835813 8113116 8993855 5769754 8414914
4534150 9129540 7005019 4775486 1630754 2264172 9394680 3673198 0586183 3918328
5991303 9607201 4455950 4497792 1207612 4785645 9161608 3705949 8786006 9701894
0988640 0764436 1709334 1727091 9143365 0137157 6601148 0381430 6262380 5143211
7348151 0055901 3456101 1800790 5063814 2152709 3085880 9287570 3450507 8081454
5881990 6336129 8279814 1174533 9273120 8092897 2792221 3298064 2946878 2427487
4017450 5540677 8757083 2373109 7591511 7762978 4432847 4790817 6518097 7872684
1611763 2503861 2112914 3683437 6702350 3711163 3072586 9883258 7103363 2223810

```

Dalla proporzione

$$a : x = x : (a - x)$$

è inoltre possibile dedurre che sommando o sottraendo a un segmento la sua sezione aurea si ottiene un nuovo segmento di cui quello dato è sezione aurea. Infatti applicando alla proporzione la proprietà del comporre (o dello scomporre) si ha

$$(a + x) : a = [x + (a - x)] : x \rightarrow (a + x) : a = a : x$$

che è la definizione di sezione aurea tra i segmenti $a+x$ e a .

Quindi si è data una dimostrazione di tipo algebrico alle proprietà del pentagono regolare, del pentagramma e del rettangolo aureo.

Proprietà del rapporto aureo

Il valore di ϕ presenta alcune curiose proprietà. Se si eleva al quadrato questo valore si otterrà:

$$j^2 = 2,6180339887...$$

mentre il reciproco di ϕ vale esattamente

$$\frac{1}{j} = 0,6180339887...$$

I valori ϕ , ϕ^2 , ϕ^{-1} hanno le medesime cifre decimali.

Ciò è facilmente deducibile partendo dalla proporzione di definizione

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = j$$

da cui si ricava

$$a = jx \rightarrow \frac{jx}{x} = \frac{x}{jx-x} \rightarrow j = \frac{1}{j-1}$$

Si otterrà così l'equazione

$$j^2 - j - 1 = 0$$

la cui soluzione positiva è il valore di ϕ .

Da questa equazione sono immediate le considerazioni

$$j^2 = j + 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{j} = j - 1$$

che giustificano la proprietà dei valori ϕ , ϕ^2 e ϕ^{-1} di avere la medesima parte decimale.

Ma ancora più curiosi sono altri due metodi per calcolare il valore di ϕ .

Si consideri la seguente espressione consistente in radici quadrate nidificate che si succedono indefinitamente

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Calcoliamo il valore x tale per cui si abbia

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Si elevino al quadrato entrambi i membri dell'equazione, di modo da avere

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Si noti però che il secondo addendo del membro di destra è uguale a x , perché essendo infinita la serie di operazioni “aumento di 1 ed estrazione della radice quadrata”, il fatto di averne tolta una è indifferente. Perciò

$$x^2 = 1 + x$$

Ma questa non è altro che l'equazione del rapporto aureo, e il valore di x corrisponderà a quello di ϕ .

Si consideri ora un tipo di entità matematiche note come *frazioni continue*, in particolare la frazione continua

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Si indichi con x il valore assunto da tale frazione:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Si nota che il valore del denominatore della frazione membro di destra è uguale a x stesso. Come nel caso precedente, togliere il primo termine di una sequenza *illimitata* di termini uguali, dà origine a una sequenza indistinguibile da quella primitiva. Quindi si avrà:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Ancora una volta ci si è ricondotti all'equazione che esprime il valore del rapporto aureo; ciò ci permette di concludere che il valore di questa funzione continua corrisponderà a ϕ .

Questa frazione non contiene numeri all'infuori di 1 e converge perciò molto lentamente a ϕ . In un certo senso il rapporto aureo “resiste” alla propria espressione sotto forma di frazione più di qualunque altro numero irrazionale, e perciò viene anche detto “il più irrazionale” degli irrazionali.

[Fibonacci e la sezione aurea](#)



La storia della sezione aurea è strettamente legata al nome di un grande matematico italiano del Duecento, Leonardo da Pisa più conosciuto come Leonardo Fibonacci. Egli fu l'autore dell'importante trattato di matematica *Liber abaci*, che permise la diffusione in tutta Europa delle cifre indo-arabe. Questo metodo di notazione era superiore agli altri in quanto era basato sul principio di valore dipendente dalla posizione delle cifre nel numero (al contrario, ad esempio, della notazione romana). Il *Liber abaci* diede notorietà al suo autore tanto che Federico II lo volle alla sua corte. La straordinaria padronanza della teoria dei numeri dimostrata da Fibonacci gli permise di risolvere alcuni tra i più complessi problemi matematici dell'epoca. Il più famoso è sicuramente quello tratto dal dodicesimo capitolo del *Liber abaci*:

Un uomo mise una coppia di conigli in un luogo circondato da tutti i lati da un muro. Quante coppie di conigli possono essere prodotte dalla coppia iniziale in un anno supponendo che ogni mese ogni coppia produca una nuova coppia in grado di riprodursi a sua volta dal secondo mese?

Per risolvere il problema basta un po' di buon senso. Si inizia con una coppia. Dopo il primo mese, la prima coppia dà origine a un'altra coppia, per cui ne abbiamo due. Dopo il secondo mese, la coppia matura produce un'altra coppia giovane, mentre la precedente coppia diventa matura. Le coppie sono quindi tre. Dopo il terzo mese, ciascuna delle due coppie mature genera un'altra coppia, mentre la coppia giovane diventa matura, cosicché le coppie sono cinque. Trascorso il quarto mese, ciascuna delle tre coppie mature genera una coppia, mentre le due coppie giovani diventano mature, portando il totale a otto coppie. Dopo il quinto mese, otteniamo una coppia giovane da ciascuna delle cinque coppie adulte, mentre tre coppie diventano mature, per un totale di tredici (figura 11). A questo punto è ormai chiaro come sia possibile calcolare, mese dopo mese, il numero di coppie mature, coppie giovani e coppie complessive. Supponiamo di esaminare solo il numero di coppie adulte, un mese dopo l'altro. Tale numero risulta composto dal numero di coppie adulte nel mese precedente, più il numero di coppie giovani diventate adulte dal medesimo mese precedente. Ma questo numero di coppie giovani in effetti è uguale al numero di coppie adulte nel mese ancora precedente. Perciò, in ogni mese a partire dal terzo, il numero di coppie adulte è semplicemente uguale alla *somma del numero delle coppie adulte nei due mesi precedenti*.

Il numero di coppie adulte formerà quindi la successione:

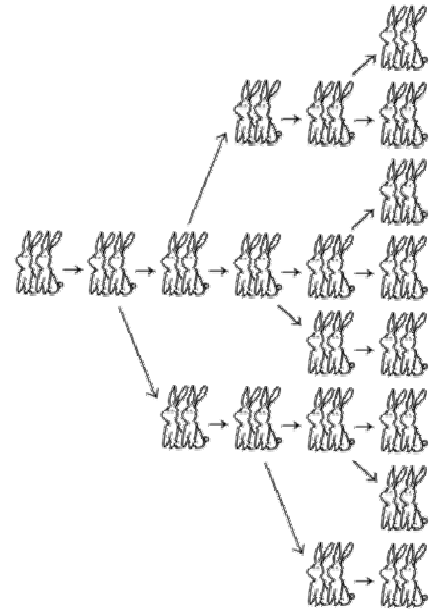


Fig.11

1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

La successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... in cui ciascun termine (a partire dal terzo) è uguale alla somma dei due termini precedenti è stata appunto chiamata, nel XIX secolo, *successione di Fibonacci*.

Le successioni numeriche in cui la relazione tra termini successivi si può esprimere con un'espressione matematica si chiamano *ricorsive*, e quella di Fibonacci fu la prima di questo tipo conosciuta in Europa.

La proprietà generale di ogni elemento della sequenza di essere uguale alla somma dei due precedenti si esprime in modo sintetico con la scrittura

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

in cui F_n sta a indicare l'ennesimo termine della successione.

La successione di Fibonacci è rintracciabile in natura, nella musica, ma nell'ultimo secolo si sono scoperte applicazioni di questa sequenza anche in ambito finanziario, nell'andamento del mercato azionario.

In natura, per motivi legati allo sviluppo dei fiori, il numero di petali di molti di essi è un numero di Fibonacci. Per esempio il giglio ha 3 petali, i ranuncoli ne hanno 5, la cicoria 21, la margherita spesso 34 o 55; la testa dei girasoli è costituita da due serie di spirali, una in un senso ed una in un altro. Il numero di spirali di senso diverso differisce per 21 e 34, 34 e 55, 55 e 89, o 89 e 144 semi e lo stesso avviene per le pigne, per le conchiglie, per l'ananas



La successione di Fibonacci è anche legata al rapporto aureo. Consideriamo i rapporti degli elementi contigui:

$$\begin{aligned} 1/1 &= 1.0000000000000000 \\ 2/1 &= 2.0000000000000000 \\ 3/2 &= 1.5000000000000000 \\ 5/3 &= 1.6666666666666667 \\ 8/5 &= 1.6000000000000000 \\ 13/8 &= 1.6250000000000000 \\ 21/13 &= 1.615384615384615 \\ 34/21 &= 1.619047619047619 \\ 55/34 &= 1.617647058823529 \\ 89/55 &= 1.618181818181818 \\ &\dots \end{aligned}$$

Procedendo lungo la successione di Fibonacci, il rapporto tra un termine e il suo precedente oscilla intorno a un numero, al quale si avvicina sempre di più; questo numero è il rapporto aureo.

Il rapporto aureo è quindi il limite per n che tende ad infinito del quoziente tra l' n -esimo termine della sequenza di Fibonacci e il suo precedente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = j$$

Questa proprietà fu scoperta dall'astronomo tedesco Keplero nel 1611 e dimostrata dal matematico scozzese Robert Simon un secolo più tardi.

Per spiegare l'uguaglianza appena trovata si noti che

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

che è un altro modo di definire la sequenza di Fibonacci. Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

Il termine

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

è equivalente al termine di partenza, in quanto indica sempre il rapporto tra due elementi successivi della successione di Fibonacci. Perciò

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

Detto x il valore di partenza si avrà

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x}$$

che riconduce all'equazione di definizione del rapporto aureo. Si può concludere quindi che il valore x sarà esattamente uguale a ϕ .

A metà del XIX secolo, il matematico francese Binet riscoprì una formula che a quanto pare era già nota nel XVIII secolo al più prolifico matematico di ogni tempo, Eulero. La formula permette di calcolare qualunque numero di Fibonacci, purché sia noto il suo posto nella successione. La formula di Binet si basa interamente sul rapporto aureo:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Di primo acchito, è una formula davvero sconcertante, non essendo evidente nemmeno che per qualunque valore di n essa abbia come risultato un intero (quali sono tutti i termini della successione di Fibonacci). Si nota come il primo termine all'interno della parentesi quadra sia il rapporto aureo elevato all' n -esima potenza, ϕ^n , mentre il secondo corrisponde a $(-1/\phi)^n$.

La formula può essere pertanto riscritta come:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[j^n - \left(-\frac{1}{j} \right)^n \right] = \frac{j^n - (-j)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

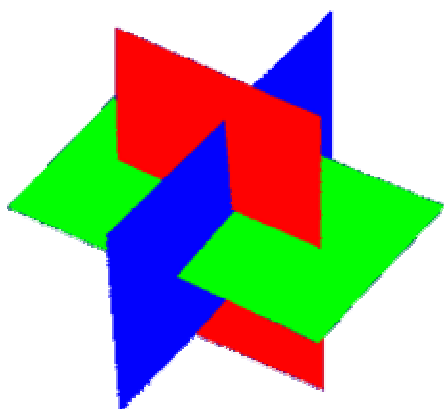
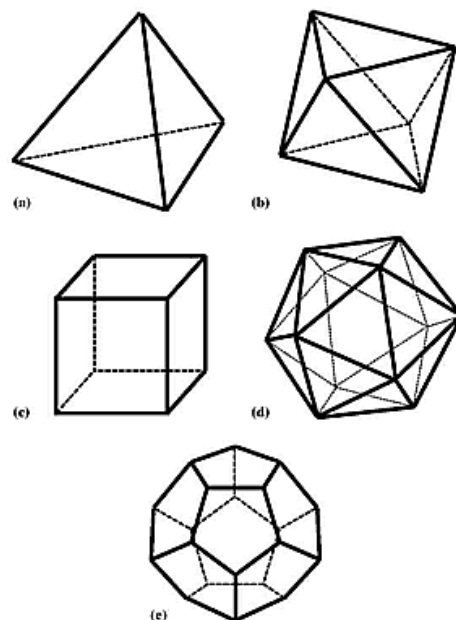
Per valori piuttosto grandi di n , il secondo termine in parentesi quadra diventa molto piccolo, cosicché F_n è semplicemente l'intero più vicino a $\frac{j^n}{\sqrt{5}}$.

Solidi platonici

Nel *Timeo* Platone affronta la questione delle origini e del funzionamento del cosmo. In tale contesto egli avanza l'ipotesi che la struttura della materia si fondi sui cinque solidi regolari (o poliedri). I cinque *solidi platonici* sono contraddistinti dalle seguenti proprietà: sono gli unici solidi le cui facce sono tutte equilateri e uguali tra loro; ciascun solido è circoscrivibile da una sfera (in modo che tutti i suoi vertici si trovino sulla superficie di quest'ultima).

I solidi platonici sono (figura a lato): il tetraedro (a), con quattro facce triangolari; il cubo (c), con sei facce quadrate; l'ottaedro, con otto facce triangolari (b); il dodecaedro, con dodici facce pentagonali (e); e l'icosaedro, con venti facce triangolari (d).

Il rapporto aureo occupa una posizione importante nelle dimensioni e nella simmetria di alcuni solidi platonici. In particolare un dodecaedro con lato unitario ha una superficie complessiva la cui area è pari a $15j\sqrt{3-j}$ e un volume uguale a $5j^3/(6-2j)$. In modo simile, un icosaedro di lato unitario ha un volume uguale a $5j^5/6$.



Altri particolari legami si possono individuare tra questi due solidi e il rettangolo aureo. Tre rettangoli aurei uguali che si intersecano ortogonalmente come in figura 12 formano 12 vertici.

Fig. 12

Questi 12 vertici possono essere uniti tra loro per formare i 12 vertici di ciascuno dei 20 triangoli di un icosaedro (figura 13a). Ma ciascuno dei 12 vertici può essere considerato il centro di ciascuna delle 12 facce pentagonali che costituiscono un dodecaedro (figura 13b).

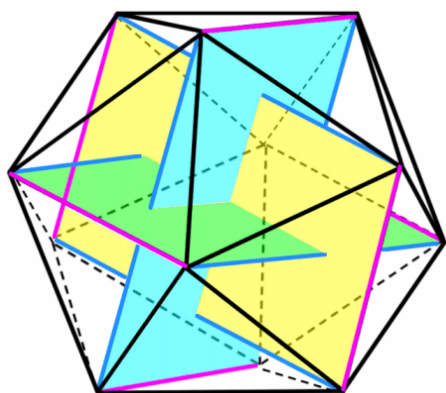


Fig. 13a

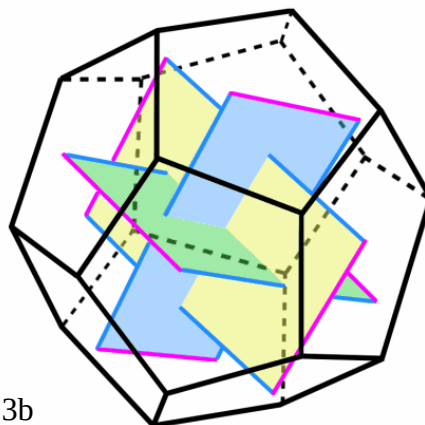


Fig. 13b



Algoritmi per il calcolo di phi

Di seguito è illustrato un programma in linguaggio Pascal che permette di calcolare un valore approssimato di ϕ tramite 3 differenti algoritmi, che derivano da considerazioni sulle caratteristiche del rapporto aureo appena descritte. Il programma dà un'approssimazione di ϕ tramite il metodo di derivazione da funzione continua, il metodo di derivazione da radici nidificate o tramite il calcolo dei rapporti tra elementi contigui della sequenza di Fibonacci.

```
program sezione_aurea;
uses crt;
var scelta:char;
    i,n:integer;
    uscita:string[5];
```

Dopo aver assegnato un nome al programma viene caricata la libreria necessaria. Sono dichiarate un totale di 4 variabili: la variabile *scelta*, necessaria per l'opzione di quale algoritmo utilizzare; le variabili globali di tipo intero *i* ed *n* dichiarate per gli ordinamenti e per i cicli; e infine la variabile *uscita* che permette la ripetizione a piacere dell'intero programma.

```
(*procedure richiamate nel main program*)
(*frazione continua*)
procedure frazione(n:integer);
var phi:real;
begin
    phi:=1;
    for i:=1 to n do
        begin
            phi:=1+1/phi;
            writeln(phi:0:15);
        end;
    writeln;
    textcolor(12);
    writeln('phi~= ',phi:0:15);
end;
```

Vengono quindi espresse tre procedure, ciascuna contenente un algoritmo per l'approssimazione di ϕ , che verranno poi richiamate nel programma principale. La prima di queste procedure, *frazione*, è quella che calcola il valore del rapporto aureo tramite la funzione continua

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Dichiarata la variabile locale *phi*, le viene assegnato il valore di innesco 1. Il ciclo *for...to...do* si ripeterà *n* volte (variabile passata per valore) tante quante saranno scelte nel main program (vedi più avanti); maggiore sarà *n* migliore sarà l'approssimazione di *phi*.

```
(*radici nidificate*)
procedure radici(n:integer);
var phi:real;
begin
    phi:=0;
    for i:=1 to n do
        begin
            phi:=sqrt(1+phi);
            writeln(phi:0:15);
        end;
end;
```

```

        end;
        writeln;
        textcolor(12);
        writeln('phi~=' ,phi:0:15);
end;

```

La seconda procedura, *radici*, si rifà alla derivazione di ϕ tramite le radici nidificate

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$$

Viene sempre dichiarata la variabile locale *phi* e le viene assegnato il valore di innesco 0. Il ciclo *for...to...do* si ripeterà *n* volte (variabile passata per valore), tante quante sarà stato scelto nel main program (vedi più avanti); maggiore sarà *n* migliore sarà l'approssimazione di *phi*.

```

(*fibonacci*)
procedure fibonacci(n:integer);
var fibo:array [1..50] of integer;
    phi:real;
begin
    writeln('Sequenza di Fibonacci fino al ',n,'esimo elemento:');
    fibo[1]:=1; (*generazione e scrittura sequenza*)
    fibo[2]:=1;
    write(fibo[1],' ',fibo[2],' ');
    for i:=3 to n do
        begin
            fibo[i]:=fibo[i-1]+fibo[i-2];
            write(fibo[i],' ');
        end;
    writeln; writeln;
    write('Premi invio per calcolare phi dalla sequenza di Fibonacci...');
    readln;writeln;
    for i:=2 to n do (*approssimazione di phi*)
        begin
            phi:=fibo[i]/fibo[i-1];
            writeln(phi:0:15);
        end;
    writeln;
    textcolor(12);
    writeln('phi~=' ,phi:0:15);
end;

```

La terza procedura, *fibonacci*, sfrutta il fatto che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = j$$

Oltre alla variabile locale *phi*, viene dichiarata una variabile di tipo array, che ha il compito di contenere gli elementi della successione di Fibonacci.

Prima viene generata e quindi scritta la sequenza di Fibonacci fino all'ennesimo elemento (con *n* scelto nel main program): dati i valori di innesco per i primi due elementi della sequenza, i successivi sono calcolati come somma dei due elementi precedenti. Il numero *n* di elementi dovrà comunque essere minore di 46, in quanto oltre tale limite i valori usciranno dal range del programma delle variabili di tipo integer. La seconda parte della procedura calcola i rapporti tra un elemento della successione e l'elemento ad esso precedente. Maggiore è il numero di elementi, migliore sarà l'approssimazione di ϕ .

```

(*main program*)
begin
  repeat
    clrscr;
    textcolor(10);
    writeln('~~~~ SEZIONE AUREA ~~~~ Milani Damiano');
    writeln; textcolor(15);
    writeln('Scegli il tipo di algoritmo tramite cui vuoi calcolare un''approssimazione
di phi');
    writeln('[a] funzione continua');
    writeln('[b] radici nidificate');
    writeln('[c] sequenza di Fibonacci');
    writeln; write('=>');
    readln(scelta); writeln; textcolor(14);

```

Ha quindi inizio il *main program*; è preposta l'istruzione *repeat* per fare in modo che sia possibile ripetere l'intero programma a piacimento. Vengono presentate le tre opzioni per calcolare il valore approssimato di ϕ , ciascuna associata a un carattere.

```

  case scelta of
    'a': begin
      writeln('FUNZIONE CONTINUA'); textcolor(15);
      writeln('Inserisci il numero n di volte che si desidera ripetere il ciclo');
      readln(n);(*maggiore sarà n, migliore sarà l'approssimazione di phi*)
      writeln; writeln;
      frazione(n);
    end;
    'b': begin
      writeln('RADICI NIDIFICATE'); textcolor(15);
      writeln('Inserisci il numero n di volte che si desidera ripetere il ciclo');
      readln(n);(*maggiore sarà n, migliore sarà l'approssimazione di phi*)
      writeln; writeln;
      radici(n);
    end;
    'c': begin
      writeln('SEQUENZA DI FIBONACCI'); textcolor(15);
      writeln('Inserisci il numero n di elementi della sequenza di Fibonacci');
      readln(n);(*maggiore sarà n, migliore sarà l'approssimazione di phi*)
      writeln; writeln;
      fibonacci(n);
    end;
  end;
end;

```

Il comando *case...of...end* permette la selezione multipla tra i diversi procedimenti: ciascuna delle lettere associate alle opzioni precedenti consente l'esecuzione di una delle tre procedure dichiarate all'inizio del programma. Tutte le procedure passano per valore la variabile *n*, che decide il criterio di interruzione dei cicli di ciascuna procedura. In tutti i casi maggiore sarà il valore di *n* migliore sarà l'approssimazione di ϕ .

```

    textcolor(14);
    writeln;writeln;writeln;
    writeln('Type ''esci'' to exit or press enter to continue');
    write('=>');
    readln(uscita);
    until (uscita='esci') or (uscita='ESCI');
end.

```

Il programma è perciò terminato. L'istruzione *repeat...until* consente la ripetizione dell'intero programma, a meno che non venga digitata la parola *esci*.



I Pitagorici

Scorgo un certo ordine nell'universo e la matematica è un modo per renderlo visibile.

May Sarton

Come già affermato la scoperta dell'irrazionalità della sezione aurea è da attribuire alla scuola dei pitagorici. Il neoplatonico Giamblico scrive di Ippaso di Metaponto:

Si dice che Ippaso che fosse un pitagorico, e che essendo stato il primo a pubblicare e descrivere la sfera dai dodici pentagoni, sia perito in mare per la sua empietà, ma sia stato creduto l'autore della scoperta, sebbene questa in realtà discenda da LUI (così infatti essi chiamano Pitagora, né lo citano mai per nome).

Con la formula "descrivere la sfera dai dodici pentagoni" Giamblico si riferisce, in modo piuttosto impreciso, alla costruzione del dodecaedro.

Ma un'altra prova che sottolinea l'interesse dei pitagorici per la sezione aurea è l'adozione del pentagramma quale simbolo della loro confraternita. Per i pitagorici quindi la matematica giocò un ruolo di primo piano: era il pilastro su cui era fondata la *dottrina del numero*.

Figura centrale, quasi leggendaria, di questa scuola era Pitagora. La scuola che fondò a Crotone intorno al 520 a.C. fu un'associazione religiosa e politica di carattere aristocratico. Per questo venne distrutta dal movimento democratico che nelle città greche dell'Italia meridionale si oppose al regime aristocratico.

Con molta probabilità Pitagora non scrisse nulla; ci sono giunti solo pochi frammenti di altri pitagorici, come Filolao, contemporaneo di Socrate. Da queste testimonianze apprendiamo come era organizzata la scuola pitagorica: i discepoli si differenziavano in *acusmatici* (o ascoltatori), ai quali era imposto il silenzio e una rigida disciplina di comportamento; e i *mathematici*, i quali potevano fare domande ed esprimere opinioni personali e ai quali venivano rivelate le dottrine più profonde del maestro. La figura di Pitagora fu venerata dagli allievi come quella di un dio. Le varie *Vite di Pitagora* che ci sono pervenute ce lo presentano come un uomo fuori dal comune: una leggenda vuole che dalla nascita egli avesse su una coscia un marchio aureo, interpretato dai suoi seguaci come il segno che lo indicava come figlio del dio Apollo.

Le dottrine principali dei pitagorici riguardano essenzialmente due argomenti:

™ la dottrina dell'anima

™ la dottrina del numero

La dottrina dell'anima

Secondo i pitagorici, che riprendono questa dottrina dall'orfismo, tra anima e corpo c'è un dissidio insanabile: il corpo è mortale e impuro, mentre l'anima è immortale. Tuttavia l'anima è costretta a reincarnarsi in corpi sempre diversi, trasmigrando, dopo la morte fisica, di corpo in corpo, fino a che non si libererà del tutto da ogni contatto materiale (teoria della metempsicosi). L'anima infatti non si trova a suo agio nel corpo, essendo di natura diversa: il corpo è considerato dai pitagorici come una prigionia dell'anima.

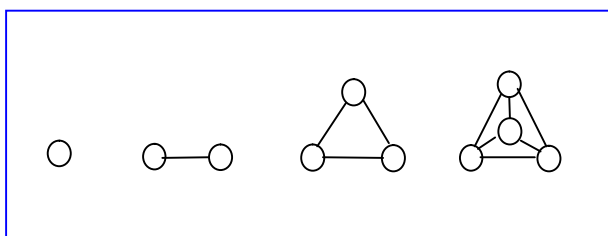
Esiste però un rimedio al male della vita corporea: la pratica dell'ascesi religiosa e, soprattutto, della sapienza filosofica che attraverso la ricerca e la conoscenza, purifica l'anima e la scioglie dalla prigionia del corpo. L'anima, una volta purificata, potrà liberarsi dal ciclo della reincarnazione e far ritorno alla divinità. Per raggiungere tale scopo l'uomo deve seguire un genere di vita austero, basato su una serie di precetti, che la tradizione ci presenta come *akúsmata* (dal greco "cose ascoltate, in riferimento alle prescrizioni del maestro che non potevano essere messe in discussione) o anche simboli (come segni di riconoscimento dei membri della setta, tra i quali appunto il pentagramma).

La dottrina del numero: la matematica

Accanto alla dottrina dell'anima, l'altro nucleo teorico del pitagorismo è rappresentato dalla dottrina dei numeri. Tra le due dottrine c'è un nesso molto stretto: tutta la vita dell'uomo saggio o *filosofo* (termine probabilmente coniato dallo stesso Pitagora) si caratterizza per l'ordine e la misura con cui sa tenere a freno gli istinti del corpo. Questo ordine non riguarda solo l'uomo, ma pervade tutta la vita del cosmo, in ogni sua manifestazione. Se volgiamo il nostro sguardo a contemplare la volta celeste, non possiamo fare a meno di restare ammirati dal moto regolare e ordinato degli astri, governato appunto dalla legge del numero. Lo stesso si dica per le dolci melodie musicali e per tutte le arti superiori.

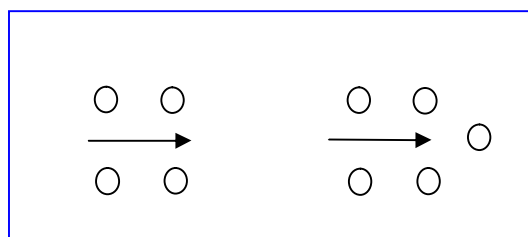
Dunque tutto deve essere regolato dal numero, che è appunto l'espressione dell'ordine dell'universo: senza di esso il mondo sarebbe caos e non potrebbe essere conosciuto. La vera sostanza delle cose quindi risiede nel numero, ovvero l'ordine numerabile di tutte le cose. Grazie ad esso noi possiamo cogliere la realtà profonda del cosmo, fatta di proporzione quantitativa tra gli elementi. Per questo gli studiosi di storia della scienza vedono in queste affermazioni l'inizio della scienza occidentale. Perfino il termine *matematica*, che significa "ciò che si apprende" sembra essere stato introdotto da Pitagora.

Secondo i pitagorici, dunque, dietro l'apparente diversità e mutevolezza dei fenomeni naturali si cela una struttura fisica semplice e numerica. Ne consegue che il numero è il principio generatore (o *arché*) di tutte le cose, la natura delle cose si modella su quella dei numeri.

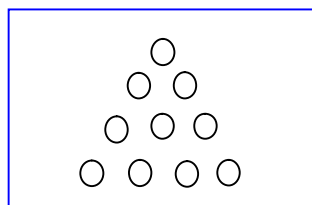


Il numero per i pitagorici, ma anche secondo la concezione greca, non era qualcosa di astratto ma aveva caratteristiche fisiche e geometriche. L'unità perciò era raffigurata con un punto, dotato di estensione spaziale, e il punto era concepito come un atomo fisico. Come si può vedere dalla figura a lato dall'uno poi si genera la linea (il

due), la superficie (il tre) e il solido (formato da quattro punti). L'unità perciò è il mattone elementare che costituisce tutte le cose. Da questo deriva che il numero è la sostanza di tutte le cose. Dato il valore enorme che il numero aveva nella dottrina pitagorica, non sorprende la sua grande estensione magico-simbolica. Particolare interesse era dedicato alla differenza tra pari e dispari. Il numero dispari corrispondeva al concetto di limite e quindi di perfezione; al contrario il numero pari implicava un concetto di illimitato ed era sinonimo di imperfezione. Anche in questo caso i pitagorici davano una giustificazione geometrica alle proprie affermazioni (figura a destra).



Ai numeri erano attribuiti ulteriori significati: l'1, il progenitore di tutti i numeri era detto parimpari (in quanto aveva sia la natura del pari che del dispari) e simboleggiava la ragione. Il 2 era il numero femminile, il numero della divisione e dell'opinione. Il 3 era invece il numero maschile, ma anche il numero dell'armonia, in quanto combinazione dell'unità (il numero 1) e della divisione (il 2). Il 4



era il numero della giustizia e dell'ordine. Collegato al numero 4 è il 10, il numero considerato perfetto. Ad esso corrispondeva la figura della *tetractys* (figura a fianco), un triangolo di lato 4. Il 10 era il numero da loro più riverito, perché considerato una rappresentazione del cosmo nella sua interezza. Il fatto che la somma dei primi quattro interi ($1+2+3+4$) sia appunto 10 collegava strettamente 10 e 4. Nello stesso tempo questa relazione significava che 10 riuniva i numeri che rappresentavano non

solo tutte le dimensioni spaziali, ma anche le proprietà fondamentali dell'unicità, della polarità, dell'armonia e della realtà spaziale.

Particolare spazio merita il numero 5. Infatti proprio il 5 ci conduce alle origini del rapporto aureo.

Il 5 era considerato l'unione del primo numero femminile col primo numero maschile, e come tale il numero dell'amore. Per questo i pitagorici avevano adottato il pentagramma, la stella a cinque punte, quale simbolo della loro confraternita, da loro chiamato "Salute".

Oltre che per l'interesse nei confronti della geometria, che portò alla definizione del celebre Teorema di Pitagora, i pitagorici, alla ricerca dell'ordine matematico sotteso al cosmo, scoprirono la progressione armonica delle note della scala musicale, attraverso la constatazione che gli intervalli musicali e l'altezza delle note corrispondono alla lunghezza relativa delle corde in vibrazione. E senza saperlo si imbatterono in curiose coincidenze che oggi possiamo ricondurre alla sequenza di Fibonacci.



Acustica e sezione aurea

La musica è il piacere che l'animo umano trae dal contare senza avere coscienza di stare contando.

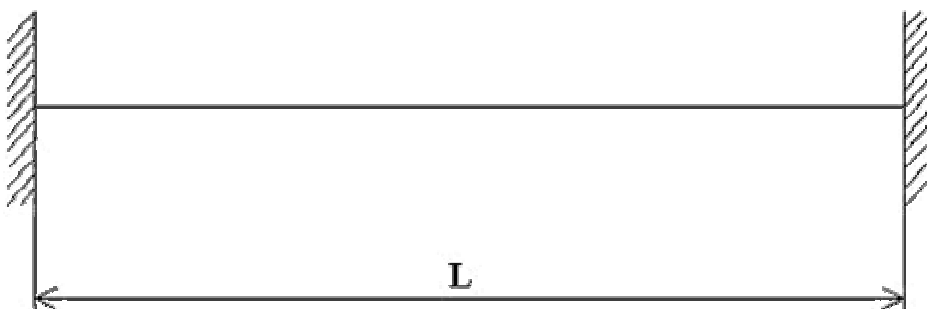
G. W. Leibniz

Pitagora osservò che dividere una corda tesa in base a numeri interi consecutivi permetteva di generare (entro certi limiti) suoni armoniosi e piacevoli, o *consonanti*. Se due note (due vibrazioni regolari) scelte a caso sono prodotte contemporaneamente, il suono che ne risulta è per lo più sgradevole o *dissonante*. Solo poche combinazioni sono gradevoli. Pitagora scoprì che queste rare consonanze si ottengono quando le note prodotte in vibrazione hanno lunghezze i cui rapporti corrispondono a quelli dei primi numeri interi.

L'unisone si ha quando le corde hanno la stessa lunghezza (rapporto 1/1); l'ottava quando una corda è lunga la metà dell'altra (rapporto 1/2). L'unisone e l'ottava sono certamente accordi consonanti, ma con questi intervalli non si può andare molto lontano nella composizione di brani musicali. Pitagora basò quindi la sua scala musicale sull'accordo consonante più semplice dopo l'unisone e l'ottava, l'accordo 2/3, detto di quinta. Queste prime, fondamentali scoperte furono la base della più sofisticata teoria degli intervalli musicali sviluppata nel XVI secolo, alla quale, contribuì tra gli altri Vincenzo Galilei, padre di Galileo.

Le onde stazionarie

Per dare una spiegazione scientifica di ciò che aveva scoperto empiricamente Pitagora, bisogna analizzare come nasce un suono. La generazione di suono più interessante (e più semplice) da analizzare è quella a *corde vibranti*. Si tratta di corde elastiche vincolate alle due estremità e soggette ad una certa tensione longitudinale. Queste, opportunamente sollecitate (con un martelletto nel caso del pianoforte, con un plettro o con le dita nel caso della chitarra), si mettono ad oscillare "in un certo modo" per un certo periodo, durante il quale trasmettono, direttamente o tramite terze parti (la chitarra acustica ha una cassa di legno che ne amplifica il suono), la vibrazione all'aria.

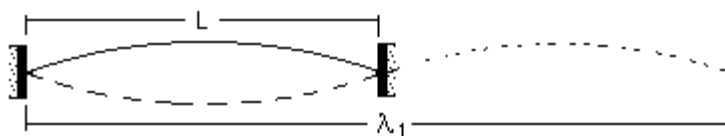


Le onde possono essere generate tendendo trasversalmente la corda (ed in questo modo la si carica con una certa energia potenziale) e lasciandola successivamente andare. In questo modo nasce una oscillazione composta da un numero teoricamente infinito di onde. Queste sono onde trasversali (nel senso che la perturbazione corrisponde ad un movimento trasversale della corda) e si propagano longitudinalmente. Di questo numero infinito di onde, che si dividerebbero l'energia fornita inizialmente in quantità infinitesime, in realtà ne "sopravvivono" solo alcune: le *onde stazionarie*.

Tale denominazione deriva dal fatto che queste onde non si spostano perché ogni punto oscilla con una ampiezza costante.

Il caso della corda vincolata agli estremi è particolarmente interessante, perché ci permette di osservare visivamente l'andamento delle vibrazioni nello spazio. Quando la eccitiamo nel mezzo, la

corda assume la forma di fuso mostrata nella figura riportata più sotto, indicando che le sue vibrazioni hanno ampiezza massima al centro e si annullano agli estremi, in corrispondenza dei vincoli. La forma del fuso, che è l'involuppo delle oscillazioni, è chiaramente sinusoidale e la sua lunghezza corrisponde a mezza lunghezza d'onda.



Come si interpreta il fenomeno? Quando eccitiamo la corda in un punto, creiamo in essa due onde impulsive, cioè contenenti una molteplicità di frequenze, che si allontanano dal punto di eccitazione in versi opposti. Quando raggiungono gli estremi, le onde impulsive vengono riflesse all'indietro dando quindi luogo a interferenza. Ma questa interferenza è costruttiva, e dunque si manifesta visibilmente, soltanto per determinate frequenze: quelle per cui lungo la corda viaggiano in sensi opposti due onde (una progressiva e l'altra regressiva) della stessa frequenza le cui oscillazioni sono esattamente in fase in ogni punto. Ciò si verifica in particolare quando le due onde hanno lunghezza d'onda pari al doppio della lunghezza L della corda, cioè:

$$l_1 = 2L$$

a cui corrisponde la frequenza

$$f_1 = \frac{v}{l_1} = \frac{v}{2L}$$

che prende il nome di *frequenza o armonica fondamentale* della corda, mentre v è la velocità di propagazione delle onde nella corda.

Questa però non è l'unica onda stazionaria possibile. Il fenomeno dell'interferenza costruttiva, nella stessa corda, si può verificare anche per onde di altre frequenze, più esattamente per tutte le onde le cui frequenze sono multiple intere della frequenza fondamentale, cioè:

$$f_n = n f_1 = \frac{nv}{2L}$$

con lunghezze d'onda corrispondenti:

$$l_n = \frac{l_1}{n} = \frac{2L}{n}$$

con n intero positivo.

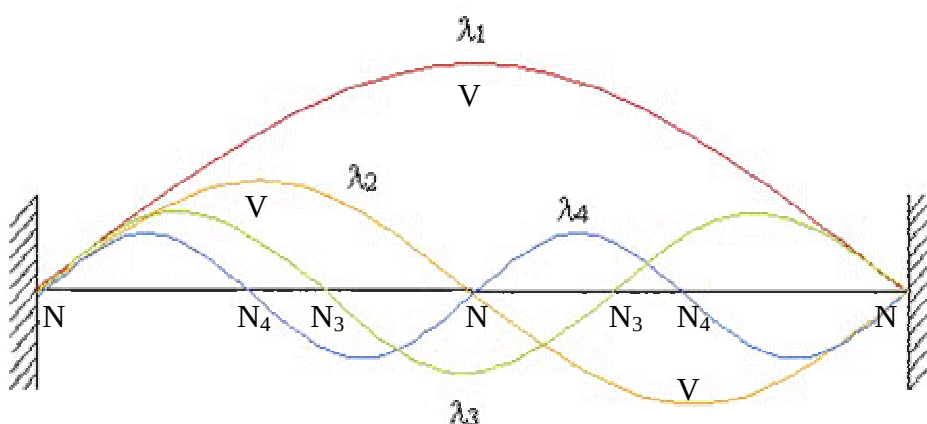


Fig. 14

La figura 14 mostra in particolare la forma delle onde stazionarie prodotte dalle prime quattro armoniche; sono indicati con N i punti della corda dove la vibrazione si annulla, chiamati *nodi*, con V i punti dove la vibrazione è massima, che sono detti *ventri*. Le condizioni di vincolo della corda impongono evidentemente due nodi ai due estremi. Fra questi nodi l'onda fondamentale ha un solo ventre, le armoniche di ordine n hanno n ventri intervallati da altri $n-1$ nodi, con distanza $\lambda/2$ fra due nodi (o due ventri) successivi.

Quando la corda subisce un'eccitazione impulsiva, in essa si producono varie onde stazionarie, idealmente tutte, se eccitata al centro dove tutte presentano un ventre. Si dice perciò che queste onde stazionarie costituiscono i *modi naturali* (o *modi normali*) di oscillazione della corda. Ma generalmente prevale il modo fondamentale, anche perché le dissipazioni crescono all'aumentare della frequenza e quindi i modi di ordine superiore decadono più rapidamente.

Fenomeni analoghi si verificano anche per le onde di compressione nell'aria all'interno di cavità. Esaminiamo il caso di un tubo cilindrico chiuso a un estremo e aperto all'altro. Qui lo spostamento dell'aria è nullo in corrispondenza dell'estremo chiuso, dove quindi vi sarà un nodo, massimo a quello aperto, dove vi sarà un ventre; nel modo fondamentale di vibrazione non vi sono altri nodi o ventri. Qui la lunghezza dell'onda stazionaria è quattro volte la lunghezza L del cilindro, cioè:

$$l_1 = 4L$$

e quindi la frequenza fondamentale del cilindro è:

$$f_1 = \frac{v}{l_1} = \frac{v}{4L}$$

dove v è la velocità dell'onda di compressione, cioè la velocità del suono nell'aria.

Si nota che in questa struttura possono aversi soltanto le armoniche dispari del modo fondamentale: le armoniche pari non sono infatti compatibili con i vincoli agli estremi del cilindro.

[La scala pitagorica e la scala temperata](#)

Da quanto appena esaminato sappiamo che Pitagora dividendo a metà una corda la faceva vibrare a una frequenza doppia di quella di partenza; infatti

$$l_2 = \frac{1}{2} l_1 \rightarrow f_2 = 2 f_1$$

e quindi l'accordo detto di ottava ha una frequenza doppia dell'armonica fondamentale.

Pitagora basò la sua scala musicale sull'accordo consonante più semplice dopo l'unisono e l'ottava, l'accordo $3/2$, la quinta. Con il metodo puramente matematico il filosofo costruì una scala di rapporti di frequenza. Con la nomenclatura moderna si può ricreare la scala pitagorica assegnando arbitrariamente il valore unitario al do e ordinando gli altri rapporti per valori crescenti; si ha perciò:

do (1), re ($9/8$), mi ($81/64$), fa ($4/3$), sol ($3/2$), la ($27/16$), si ($243/128$), do₂ (2).

La scala pitagorica fu usata per circa due millenni, tuttavia con lo sviluppo della polifonia, la sua struttura di carattere matematico e quasi magico si rivelò assolutamente inadeguata a seguire lo sviluppo della tecnica musicale.

Vennero perciò introdotte due nuove scale musicali. La prima, detta naturale o zarliniana, venne ben presto soppiantata dalla scala temperata, diffusa grazie a J. S. Bach, che è quella universalmente e tuttora utilizzata nella musica occidentale. Nella scala temperata gli intervalli tra due note successive sono sempre uguali. L'intervallo di ottava è diviso in 12 parti equivalenti, i semitoni. Per cui l'intervallo di un semitono è pari a:

$$\sqrt[12]{2} \approx 1,05946$$

La scala temperata mostra particolari riferimenti alla sequenza di Fibonacci. Il tono fondamentale stabilito convenzionalmente è il *la* a 440 Hz. Il rapporto tra l'ottava e la fondamentale è di 2/1; il rapporto tra le frequenze di una quinta (*mi* di 660 Hz) e della fondamentale (*la*) è 3/2. Un accordo di sesta maggiore si ottiene combinando il *la* fondamentale con il *do* avente una frequenza di circa 264 Hz. Il rapporto di queste frequenze corrisponde a 5/3. una sesta minore invece si ottiene combinando un *do* di 528 Hz con un *mi* di 330Hz; il rapporto di queste frequenze è 8/5. In tutti questi casi il rapporto tra le frequenze è il rapporto di due numeri di Fibonacci successivi. Come spiegato, il rapporto tra due elementi contigui della successione di Fibonacci è una buona approssimazione di ϕ .



Le galassie a spirale

Innumerevoli sono le meraviglie del mondo.
Sofocle

Da quando le galassie sono state osservate nel XVIII secolo, fino a quando Hubble dimostrò definitivamente che si trattasse di oggetti esterni alla nostra Galassia ci si è sempre chiesto perchè avessero forme spiraleggianti più o meno definite. Alcune tra esse mostrano infatti una stupefacente disposizione a spirale riconducibile alla spirale aurea.



E' sempre molto difficile rispondere alla domanda sul perchè un fenomeno naturale si manifesti in un certo modo piuttosto che in un'altro. Se accettiamo in prima approssimazione che i fenomeni naturali si propaghino ed evolvano secondo il principio di "minima energia", possiamo dare una risposta generale più o meno valida per tutti i sistemi naturali, dai più semplici ai più complessi. Quindi le forme osservate in natura sono quelle che consentono la maggiore efficienza.

Questi enormi insiemi di stelle e di altri oggetti celesti del tipo di quelli che esistono nella Via Lattea sono

anche chiamati “universi isola” per sottolineare gli immensi spazi vuoti che si trovano tra una galassia e l'altra (distanze dell'ordine di milioni di anni luce).

Le galassie si classificano in base alla forma in 3 categorie: vengono distinte galassie a spirale (circa il 78% di quelle conosciute), ellittiche (18%) e irregolari (4%).

Le galassie irregolari non hanno una forma geometricamente definita e sono tra le più piccole.

Le galassie ellittiche sono ammassi di corpi celesti che possono essere quasi sferici o anche di forma ovoidale molto schiacciata. Le stelle che le compongono sono distribuite in modo omogeneo. Le ellittiche sono tra le galassie più massicce esistenti e alcune di esse contengono fino a mille miliardi di stelle. Si tratta di stelle che hanno circa una decina di miliardi di anni, per cui le ellittiche presentano il tipico colore rossastro delle stelle vecchie e fredde.

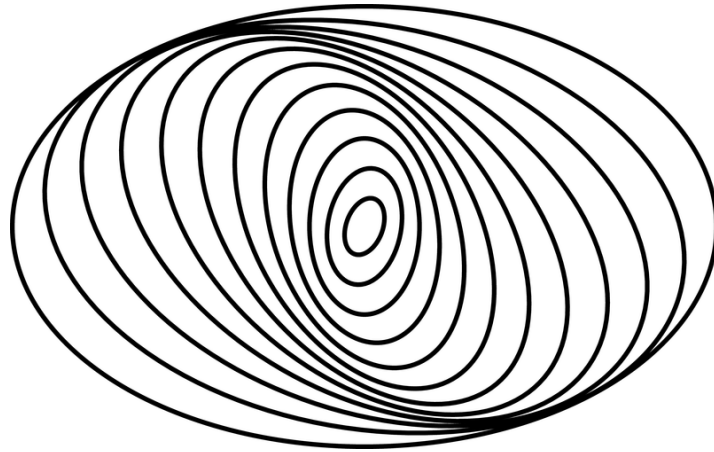
Le galassie a spirale sono a loro volta suddivise in spirali normali e spirali barrate. Presentano un centro molto denso da cui si dipartono i bracci disposti a spirale. Le galassie a spirale contengono stelle di diversa età; le più vecchie sono disposte vicino al centro e dalle nubi molecolari dei bracci si stanno ancora formando brillanti stelle blu, mentre altre stelle, giunte alla fine della loro vita, esplodono come supernovae. La nostra galassia, la Via Lattea, è una galassia a spirale.

La maggior parte delle galassie osservate presenta questa particolare forma che in molti casi è una buona approssimazione della spirale aurea. Sembra che la spirale aurea sia naturalmente associata ai tipi di galassie che si comportano come sistemi parzialmente rigidi; difatti queste galassie mostrano una velocità angolare costante per una grande percentuale del raggio.

Fino ad oggi sono state avanzate numerose ipotesi per spiegare l'esistenza delle galassie a spirale e la più accreditata sembra essere la teoria di Lin-Shu. Essa nasce dall'interrogativo di come sia possibile che la configurazione a spirale si mantenga per lunghi periodi di tempo. Infatti le parti interne del disco di una galassia ruotano più velocemente di quelle esterne e qualsiasi forma della galassia tenderebbe ad essere cancellata da tale rotazione. Quindi una struttura a spirale finirebbe con l'essere cancellata, contrariamente a quanto suggerito dall'osservazione. La spiegazione della longevità delle braccia spirali sta nelle *onde di densità*: onde di compressione gassosa che

attraversano il disco galattico producendo nubi di gas e innescando la formazione di nuove stelle. La configurazione spirale osservabile rileva semplicemente le parti del disco galattico più dense della media, ricche di nuove stelle. Non si tratta quindi della forma associata a una sostanza definita, ma di uno schema che organizza una materia sempre diversa; le braccia quindi non hanno per supporto nessuna componente materiale del disco.

L'agente che deflette il movimento delle stelle e delle nubi di gas e genera le onde spirali di densità è la forza di gravità, generata dal fatto che la distribuzione della materia nella galassia non è perfettamente simmetrica. In modo analogo a un insieme di orbite ellittiche disposte intorno a un centro, in cui ogni orbita è perturbata (ruotata) leggermente in una misura che cambia con la distanza dal centro, ha come risultato una configurazione a spirale.



Si sono voluti ricercare ulteriori indizi della presenza della sezione aurea nell'ordine dell'universo all'interno del Sistema Solare. C'è infatti chi sostiene che i pianeti ruotino su orbite che hanno distanze dal Sole basate sul rapporto aureo. La maggior parte di queste affermazioni sono però forzature del concetto di sezione aurea e non hanno alcuna base scientifica.



La sezione aurea nell'arte

Solo le persone superficiali non giudicano dalle apparenze. Il mistero del mondo è il visibile, non l'invisibile.

Oscar Wilde

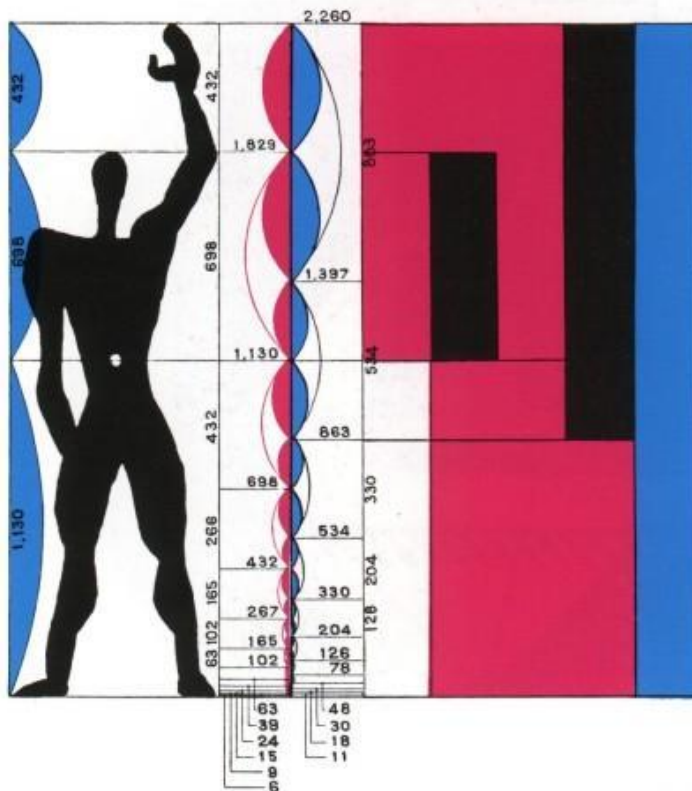
Nel campo artistico numerosi architetti, scultori e pittori hanno applicato teorie connesse alla sezione aurea. Si ipotizza che già gli antichi egizi avessero applicato queste teorie nella costruzione della Grande Piramide (Piramide di Cheope); infatti il valore che si ottiene dividendo l'altezza di una faccia triangolare del monumento sepolcrale per la metà di uno dei lati è molto vicino a ϕ .

Altre probabili applicazioni del rapporto aureo si possono trovare nelle dimensioni del Partenone, tempio che simboleggia la massima espressione degli ideali architettonici di chiarezza e unità.

Un personaggio che sicuramente trattò il rapporto aureo in campo artistico è Leonardo da Vinci. Si pensa che sia da attribuire all'artista-scienziato toscano l'espressione "proporzione divina". Alcune sue opere che richiamano la sezione aurea sono la *Vergine delle rocce*, *San Girolamo*, la *Monna Lisa* e alcuni disegni preparatori.

Nell'Ottocento Gorges Seurat (1859-1891), pittore francese teorico del *pointillisme*, si è servito di proporzioni auree per dipingere tele come *La parade*. Ma uno dei più decisi fautori dell'applicazione del rapporto aureo all'arte e all'architettura è il celebre architetto francese Le Corbusier. Molto influenzato dalle teorie matematiche attuò una ricerca di una proporzione standardizzata che culminò nell'introduzione di un nuovo sistema proporzionale chiamato *Modulor* (figura a fianco). La sua intenzione era quella di "fornire alla scala umana una misura di armonia, universalmente applicabile all'architettura e alla meccanica". Esplicitamente ispirato dall'uomo vitruviano, il *Modulor* si basa sulle proporzioni umane conformi alla creazione naturale, in particolare alla sezione aurea. Ad esempio, secondo Le Corbusier il rapporto tra la statura dell'uomo e la distanza dall'ombelico al suolo è esattamente uguale a ϕ . Nella versione finale del *Modulor* vennero poi introdotte due scale bidimensionali basate sulla successione di Fibonacci.

L'artista che interpretò in modo originale il concetto di sezione aurea è lo spagnolo Salvador Dalí. Nella sua opera *Il sacramento dell'ultima cena* sono appunto presenti riferimenti alla proporzione divina.



Salvador Dalí, *Il sacramento dell'Ultima Cena*

Salvador Dalí (Figueras, 1904-1989) diede un fondamentale contributo alla pittura surrealista, soprattutto per le sue ricerche di associazioni di immagini. Esse vengono attuate tramite il metodo “paranoico-critico”, dallo stesso Dalí definito come “metodo spontaneo della conoscenza irrazionale, basato sulla critica e sistematica oggettivazione di associazioni deliranti e di interpretazioni”. Si tratta, in altre parole, di un metodo che permette all'artista di sfruttare le irregolarità percettive, costringendo chi guarda a non uscire dall'ambiguità della visione. Questa ambiguità è però ricondotta da Dalí all'interno di una precisa metodologia artistica, tesa a moltiplicare sempre più le possibilità di visione di una medesima opera.

Dopo la rottura con il movimento surrealista, Dalí si dedicò sempre più allo studio dell'arte rinascimentale, di cui apprezzava il rigore compositivo e la precisione anatomica. A partire dal dopoguerra l'artista esprime una pittura d'ispirazione religiosa di una perfezione esecutiva maniacale, derivata, più che dai modelli accademici, dalla laboriosa tecnica preraffaellita. È in questo periodo che nasce *Il sacramento dell'Ultima Cena*.



Il sacramento dell'Ultima Cena fu dipinto nel 1955 ed è oggi conservato al National Gallery di Washington. Il primo riferimento alla sezione aurea nell'opera si rintraccia nelle dimensioni del dipinto (all'incirca 268x167 cm) che sono in un rapporto molto vicino a quello aureo e che delineano quindi un rettangolo aureo.

L'opera presenta la caratteristica impronta visionaria di Dalí, espressione della sua bizzarria e folle ostentazione. L'artista produce questa tela nella parte della sua vita conosciuta come “periodo mistico”, in cui si riavvicina al cristianesimo, non senza ambiguità e travagli interiori.

Il tema dell'Ultima Cena è trattato innumerevoli volte nel campo della pittura (si pensi a Leonardo). Ma questa composizione è un'originalissima creazione fuori da ogni schema iconografico tradizionale; è un'intima e solenne celebrazione che inquieta, crea sconcerto, conduce in un mondo che sta “oltre”, in una dimensione eterea che si scorge sullo sfondo.

Il soggetto è un rito liturgico che ricapitola tutta la vita di Gesù. Dalí associa genialmente tutta la

storia del Cristo in un'unica composizione: il "luogo della parola" di Gesù (il lago di Galilea e dintorni) e il "luogo del corpo" donato (il Cenacolo, a Gerusalemme). Il Cenacolo ha le pareti trasparenti, che lasciano intravedere un enorme dodecaedro (il solido platonico strettamente connesso con la sezione aurea) che fluttua sopra la tavola e la circonda: la geometria rappresenta qui qualcosa di mistico che rimanda alla divina proporzione. Dalí stesso ha dato una spiegazione all'intento di dare risalto al rapporto aureo nel quadro: egli ritiene che "l'eucaristia dev'essere simmetrica". La ragione della scelta del dodecaedro è invece da ricondurre alla particolare concezione che Platone aveva di questo solido: esso sarebbe "la forma usata dalle divinità per ricamare le costellazioni sull'insieme dei cieli" e quindi simbolo dell'universo nel suo insieme.

Altro elemento chiave della tela è la luce, generata da un sole all'orizzonte e nel contempo surreale, che produce un effetto di sorpresa sull'osservatore.

Al centro della tavola, Cristo è quasi trasparente, l'unico a non proiettare ombra sull'immensa tavola, anzi sembra essere lui stesso fonte di luce. Con una mano indica se stesso, la sua esistenza terrena; con l'altra fa alzare lo sguardo alla sua prossima condizione di risorto. Il meraviglioso busto geometrico, corpo celeste che domina la scena, innalzato tra cielo e terra, rimanda al Mistero Pasquale. È additato dallo stesso Cristo al centro del banchetto, che svela così il significato della rappresentazione.

La tavola spoglia, accoglie un pane e un calice, simboli eucaristici, elementi essenziali del banchetto. I dodici apostoli sono raffigurati col capo chino e in una posizione di meditazione monastica.

Su tutto trionfa una luce che non è più quella del crepuscolo del Giovedì santo ma quella dell'alba della Pasqua. Lo spazio davanti è vuoto: come un invito a prendere posto davanti a tanta luce e a renderci partecipi del Mistero Pasquale.



[The Divine Proportion and The Da Vinci Code](#)

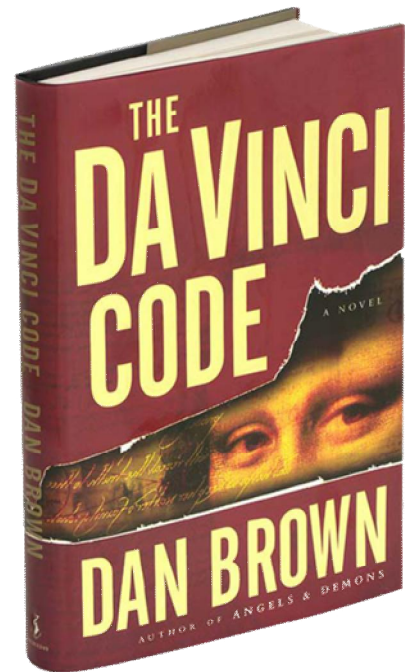
*My friends, each of you is a walking tribute to
the Divine Proportion,*

from *The Da Vinci Code*

The Da Vinci Code is a mystery/detective novel written by the American author Dan Brown and published in 2003. It is a worldwide bestseller with more than 60,5 million copies in print and has been translated into 44 languages. It is the thirteenth best-selling book of all time. The novel has provoked popular interest in speculation concerning the Holy Grail legend and the role of Mary Magdalene in the history of Christianity.

Dan Brown's novel was a smash hit in 2004, even rivalling the sales of the highly popular Harry Potter series. It spawned a number of offspring books and drew glowing reviews from the *New York Times*, *People Magazine* and the *Washington Post*. It also re-ignited interest in the history of the Roman Catholic Church. As well as re-invigorating interest in the Church, *The Da Vinci Code* follows a trend pre-figured by other Grail books such as *Holy Blood, Holy Grail* by Michael Baigent and Richard Leigh, and Umberto Eco's *Foucault's Pendulum*.

Combining the detective, thriller and conspiracy fiction genres, the book is the second book by Dan Brown to include the character Robert Langdon, the first being Brown's novel, *Angels and Demons* (2000). In 2006, a film adaptation, *The Da Vinci Code*, was directed by Ron Howard.



The plot

The Da Vinci Code deals with the attempts of Robert Langdon, Professor of Religious Symbolology at Harvard University, to solve the murder of the curator Jacques Saunière, whose body is found at the Louvre Museum in Paris. The title of the novel itself is strictly connected to the fact Saunière's body is found in the Denon Wing of the Louvre naked and posed like Leonardo da Vinci's famous drawing, the *Vitruvian Man*, with a cryptic message written beside his body and a Pentacle (figure connected with the golden section) drawn on his stomach in his own blood. The novel is very complex and its rhythm is very quick; as a matter of fact, the novel has concurrent storylines which follow different characters throughout different parts of the book. All the characters and the storylines are brought together and resolved in its denouement. The unravelling of the mystery requires the solution to a series of brain-teasers (including anagrams and number puzzles). The solution itself is related to the possible location of the Holy Grail and to a mysterious society called the Priory of Sion as well as to the Knights Templar. The Roman Catholic organization Opus Dei is also involved in the whole story.

The main characters of the novel are: Robert Langdon, Professor of Religious Symbolology at Harvard University, the protagonist of the book. Jacques Saunière, the curator of the Louvre Museum. Sophie Neveu, the female protagonist, Saunière's nephew and a French Police agent; at the end of the book she finds out that she is a descendant of the Merovingians. Leigh Teabing is a British Royal Historian, he is the antagonist character. Silas is an albino monk, a devotee of the Catholic organization Opus Dei, who practices severe corporal mortification; he is Saunière's murderer. Choosing the names of the characters, Dan Brown seems to have used a lot of puns and anagrams. As a matter of fact the name of the antagonist, Leigh Teabing, could have been chosen using the names of the two authors of the essay *Holy Blood, Holy Grail*, Richard Leigh and Michael Baigent (Teabing is the anagram of Baigent).

The Holy Grail

The fortune of the novel probably comes from the presence of the mysterious theme of Christ's bloodline that caused a great scandal but also an extraordinary interest.

According to the book, the figure at the right hand of Jesus Christ in the famous painting *The Last Supper* by Leonardo da Vinci is not the apostle John, but Mary Magdalene, who was pregnant with Jesus' child when he was crucified. In addition, the absence of a chalice on the table is not casual at all: it seems to indicate that Leonardo knew that Mary Magdalene herself was the Holy Grail. But the absence of the apostle John is only apparent: it is explained by means of the identification of John with "the Disciple Jesus loved" (an allegorical allusion to Mary Magdalene). The colour scheme of Jesus and Magdalene's garments are also inverted: there is a perfect correspondence between them. Jesus wears a red blouse with royal blue cape and John/Mary wears a royal blue blouse with red cape (it may be considered as a symbol the two bonded halves of marriage). By moving John/Mary to Jesus' right, you can see that his/her head fits perfectly onto Jesus' shoulders. There are a lot of secrets surrounding the Holy Grail, but the most important one is that the Holy Grail is not a physical chalice, but a woman, that is Mary Magdalene, who carried the bloodline of Christ. The Old French expression for the Holy Grail, *San gréal*, is a play on *Sang réal*, which literally means "royal blood" in Old French.

Many of these things are incorrect from an artistic and historical point of view. Dan Brown drew inspiration from Gnostic Gospels and other ambiguous documents. It is very unlikely that Leonardo had painted a woman in his picture; the apostle John bears a close resemblance to a woman only because he is very young. Dan Brown was also accused by the Church because he portrayed the Opus Dei, a catholic institution, as a Masonic association.

The golden section

In the novel the golden section or Fibonacci sequence is often mentioned. For example the message written by Saunière contains the first eight digits of the Fibonacci sequence out of order; in addition, the key that opens a safe deposit box at the Paris branch of the Depository Bank of Zurich, is a 10-digit number that consists of the digits of the first eight Fibonacci numbers, arranged in the correct order (1123581321).

Another element connected with the golden mean is the pentacle painted with Saunière's blood. But in the book there is a large part dealing with the number *phi* and its presence in the nature.

Excerpt from Chapter 20, Page 77.

He felt himself suddenly reeling back to Harvard, standing in front of his "Symbolism in Art" class, writing his favorite number on the chalkboard.

1.618

Langdon turned to face his sea of eager students. "Who can tell me what this number is?"

A long-legged math major in back raised his hand. "That's the number PHI." He pronounced it fee.

"Nice job, Stettner," Langdon said. "Everyone, meet PHI."

"Not to be confused with PI," Stettner added, grinning. "As we mathematicians like to say: PHI is one H of a lot cooler than PI!"

Langdon laughed, but nobody else seemed to get the joke.

Stettner slumped.

"This number PHI," Langdon continued, "one-point-six-one-eight, is a very important number in art. Who can tell me why?"

Stettner tried to redeem himself. "Because it's so pretty?"

Everyone laughed.

"Actually," Langdon said, "Stettner's right again. PHI is generally considered the most beautiful number in the universe."

The laughter abruptly stopped, and Stettner gloated.

As Langdon loaded his slide projector, he explained that the number PHI was derived from the Fibonacci sequence—a progression famous not only because the sum of adjacent terms equaled the next term, but because the quotients of adjacent terms possessed the astonishing property of approaching the number 1.618—PHI!

Despite PHI's seemingly mystical mathematical origins, Langdon explained, the truly mind-boggling aspect of PHI was its role as a fundamental building block in nature. Plants, animals, and even human beings all possessed dimensional properties that adhered with eerie exactitude to the ratio of PHI to 1.

"PHI's ubiquity in nature," Langdon said, killing the lights, "clearly exceeds coincidence, and so the ancients assumed the number PHI must have been preordained by the Creator of the universe. Early scientists heralded one-point-six-one-eight as the Divine Proportion."

"Hold on," said a young woman in the front row. "I'm a bio major and I've never seen this Divine Proportion in nature."

"No?" Langdon grinned. "Ever study the relationship between females and males in a honeybee community?"

"Sure. The female bees always outnumber the male bees."

"Correct. And did you know that if you divide the number of female bees by the number of male bees in any beehive in the world, you always get the same number?"

"You do?"

"Yup. PHI."

The girl gaped. "NO WAY!"

"Way!" Langdon fired back, smiling as he projected a slide of a spiral seashell. "Recognize this?"

"It's a nautilus," the bio major said. "A cephalopod mollusk that pumps gas into its chambered shell to adjust its buoyancy."

"Correct. And can you guess what the ratio is of each spiral's diameter to the next?"

The girl looked uncertain as she eyed the concentric arcs of the nautilus spiral.

Langdon nodded. "PHI. The Divine Proportion. One-point-six-one-eight to one."

The girl looked amazed.

Langdon advanced to the next slide—a close-up of a sunflower's seed head. "Sunflower seeds grow in opposing spirals. Can you guess the ratio of each rotation's diameter to the next?"

"PHI?" everyone said.

"Bingo." Langdon began racing through slides now—spiraled pinecone petals, leaf arrangement on plant stalks, insect segmentation—all displaying astonishing obedience to the Divine Proportion.

"This is amazing!" someone cried out.

"Yeah," someone else said, "but what does it have to do with art?"

"Aha!" Langdon said. "Glad you asked." He pulled up another slide—a pale yellow parchment displaying Leonardo da Vinci's famous male nude—The Vitruvian Man—named for Marcus Vitruvius, the brilliant Roman architect who praised the Divine Proportion in his text *De Architectura*.

"Nobody understood better than Da Vinci the divine structure of the human body. Da Vinci actually exhumed corpses to measure the exact proportions of human bone structure. He was the first to show that the human body is literally made of building blocks whose proportional ratios always equal PHI."

Everyone in class gave him a dubious look.

"Don't believe me?" Langdon challenged. "Next time you're in the shower, take a tape measure."

A couple of football players snickered.

"Not just you insecure jocks," Langdon prompted. "All of you. Guys and girls. Try it. Measure the distance from the tip of your head to the floor. Then divide that by the distance from your belly button to the floor. Guess what number you get."

"Not PHI!" one of the jocks blurted out in disbelief.

"Yes, PHI," Langdon replied. "One-point-six-one-eight. Want another example? Measure the distance from your shoulder to your fingertips, and then divide it by the distance from your elbow to your fingertips. PHI again. Another? Hip to floor divided by knee to floor. PHI again. Finger joints. Toes. Spinal divisions. PHI. PHI. PHI. My friends, each of you is a walking tribute to the Divine Proportion."

Even in the darkness, Langdon could see they were all astounded. He felt a familiar warmth inside. This is why he taught. “My friends, as you can see, the chaos of the world has an underlying order. When the ancients discovered PHI, they were certain they had stumbled across God’s building block for the world, and they worshipped Nature because of that. And one can understand why. God’s hand is evident in Nature, and even to this day there exist pagan, Mother Earth-revering religions. Many of us celebrate nature the way the pagans did, and don’t even know it. May Day is a perfect example, the celebration of spring... the earth coming back to life to produce her bounty. The mysterious magic inherent in the Divine Proportion was written at the beginning of time. Man is simply playing by Nature’s rules, and because art is man’s attempt to imitate the beauty of the Creator’s hand, you can imagine we might be seeing a lot of instances of the Divine Proportion in art this semester.”

Over the next half hour, Langdon showed them slides of artwork by Michelangelo, Albrecht Dürer, Da Vinci, and many others, demonstrating each artist’s intentional and rigorous adherence to the Divine Proportion in the layout of his compositions. Langdon unveiled PHI in the architectural dimensions of the Greek Parthenon, the pyramids of Egypt, and even the United Nations Building in New York. PHI appeared in the organizational structures of Mozart’s sonatas, Beethoven’s Fifth Symphony, as well as the works of Bartók, Debussy, and Schubert. The number PHI, Langdon told them, was even used by Stradivarius to calculate the exact placement of the f-holes in the construction of his famous violins.

“In closing,” Langdon said, walking to the chalkboard, “we return to symbols” He drew five intersecting lines that formed a five-pointed star. “This symbol is one of the most powerful images you will see this term. Formally known as a pentagram—or pentacle, as the ancients called it—this symbol is considered both divine and magical by many cultures. Can anyone tell me why that might be?”

Stettner, the math major, raised his hand. “Because if you draw a pentagram, the lines automatically divide themselves into segments according to the Divine Proportion.”

Langdon gave the kid a proud nod. “Nice job. Yes, the ratios of line segments in a pentacle all equal PHI, making this symbol the ultimate expression of the Divine Proportion. For this reason, the five-pointed star has always been the symbol for beauty and perfection associated with the goddess and the sacred feminine.”

This extract deals with Langdon’s flashback. He presents the number *phi* in a charming way: Langdon explains the relationship between the Fibonacci sequence and the incredible presence of this number in nature (the bees, the nautilus, the sunflower’s seed). He also insists on the appearing of *phi* in art, in music and in the proportions of man’s body. Finally he describes the pentagram, the geometrical figure connected with the golden section.

There is another imprecision in these lines: the number phi is not *exactly* equal to 1.618 because it is an irrational number, so it has infinite figures after the point.



Bibliografia

Mario Livio, *La sezione aurea. Storia di un mistero che dura da tremila anni*, Rizzoli, 2003

Dodero – Baroncini, *Moduli di lineamenti di matematica*, Ghisetti e Corvi Editori

Enciclopedia delle scienze, De Agostini

Wikipedia, The Free Encyclopedia

Domenico Massaro, *La comunicazione filosofica – Il pensiero antico e medievale*, Paravia

Ugo Amaldi, *Fisica: idee ed esperimenti*, Zanichelli

AA.VV., *Moduli di Arte – Tendenze artistiche del Novecento*, Bruno Mondadori

Filippini - Bignami – Marinoni, *Corso di geografia generale*, Minerva Italica

Dan Brown, *The Da Vinci Code*, Doubleday, 2003

Siti web

www.sectioaurea.com

www.liceoberchet.it/ricerche/sezioneaurea

www.matematicamente.it/storia/divina_proporzione.htm

www.goldennumber.net

www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html